Quantum Mechanics with Supersymmetry on a Curved Space

常葉学園浜松大学 中村 正義・岡本 直子

1. はじめに

ユークリッド空間に埋め込まれた部分多様体に拘束された力学系の量子化の問題は, 曲面上の量子論の1つとして広く研究されているが [1], このような系の量子化に際して, operator-ordering の問題が生じることはよく知られていることである. この問題に対して系の持つ超対称性はしばしば重要な役割を果たしており [2], 曲面に拘束された力学系の量子力学の超対称版を考察することは大変興味深い問題と思われる.

一般に, 拘束系を量子化するアプローチは2つに分けられる. 第1の方法は, 古典レベルで拘束を解き, 次いで縮減された位相空間で量子化するもの [3, 4] であり, 第2は最初に'平坦' な位相空間で量子化し次に拘束条件を演算子方程式として課す方法であるが, この2つの方法が等価でない場合がしばしば生じている. 第1類 (first class) の拘束の場合について, この問題は広く議論されている [5].

第2類 (second class) の拘束に対する第2の方法の1つは, 経路積分による拘束系の量子化の基礎として Batalin-Fradkin [6] によって提案された. 正準量子化による方法の1つは, 射影演算子法 [7] として我々によって提案された. これら2つの理論は, 演算子レベルで等価であること, 第1の方法では導出されない'量子効果' の項を与えることが示されている [8].

ユークリッド空間に埋め込まれた曲面に拘束された力学系は第2類の拘束系となるが, この量子力学はもっぱら第1の方法で議論されてきた. そこで, これを第2の方法 [9] で考察することは有意義であると考えられる.

本講演ではこの問題を射影演算子法を用いて, '量子効果' に焦点をあてて論ずる.

2. 曲面上の超対称自由粒子

R^N を x^i $(i=1,\cdots,N)$ を座標とする N 次元ユークリッド空間, G^2 をグラスマン変数 θ_α $(\alpha=1,2)$ によって張られた空間として $R^N\times G^2$ 上の超場 Φ^i を

$$\Phi^i = x^i + i\epsilon_{\alpha\beta}\theta_\alpha\psi^i_\beta + (1/2)i\epsilon_{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta F^i \qquad (i=1,\cdots,N) \tag{1}$$

とする. 超共変微分 D_α を $D_\alpha=\partial/\partial_\alpha - i\theta_\alpha\partial/\partial t$ として系のラグランジアンを

$$L_0 = -(1/4)\int d^2\theta D_\alpha\Phi^i\epsilon_{\alpha\beta}D_\beta\Phi^i \tag{2}$$

とする．これは，生成子を $\mathcal{Q}_\alpha = \partial/\partial_\alpha + i\theta_\alpha \partial/\partial t$ とする超対称変換 $\delta\Phi^i = -\epsilon_\alpha \mathcal{Q}_\alpha \Phi^i$ のもとで作用 $S = \int dt L_0$ を不変とする．系を R^N 内の曲面 M^{N-1} に拘束するために G を C^∞ 級関数として Φ に $G(\Phi) = 0$ を課す．これは成分でん

$$G(x) = 0, \quad \psi^i G_i = 0, \quad K = F^i G_i - (1/2)\, i\, (\psi^i \cdot \psi^j) G_{ij} = 0 \tag{3}$$

となる．ここに，$G_{i\cdots j} = \partial_i \cdots \partial_j G$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $(\psi^i \cdot \psi^j) = \psi^i_\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \psi^j_\beta$ である．

拘束 (3) を受ける系のラグランジアンは，実変数 X, Y およびグラスマン変数 τ^α を導入し，(2) を θ について積分すると

$$L = (1/2)\dot{x}^i \dot{x}^i + (1/2)\, i\, \psi^i \dot{\psi}^i + (1/2) F^i F^i + i\tau^\alpha \psi^i_\alpha G_i + XG + YK \tag{4}$$

となる．

ラグランジアン L を出発点としてハミルトニアン形式に移行して正準量子化をする．座標・運動量演算子の正準共役の組は $((x^i, p_i), (\psi^i_\alpha, \Pi^\alpha_i), (F^i, P^F_i), (\tau^\alpha, \Lambda_\alpha), (X, P^X), (Y, P^Y))$ となる．これを $C^{(0)}$ と表す。このとき，$C^{(0)}$ は第 1 次の拘束 (primary constraint)

$$\chi^\alpha_i = \Pi^\alpha_i + (1/2)\, i\, \psi^i_\alpha, \qquad P^F = \Lambda_\alpha = P^X = P^Y = 0 \tag{5}$$

を受ける．第 1 次拘束 (5) に伴うラグランジュの未定常数に対する演算子を μ^i_α, ν^α, u^i, v, w とすると系のハミルトニアンは

$$H_P = H_0 + \{\mu^i_\alpha, \chi^\alpha_i\} + \{\nu^\alpha, \Lambda_\alpha\} + \{u^i, P^F_i\} + \{v, P^X\} + \{w, P^Y\} \tag{6}$$

となる．ここに H_0 は正準ハミルトニアン

$$H_0 = (1/2) p_i p_i - (1/2) F^i F^i - i\tau^\alpha \psi^i_\alpha G_i - XG - YK \tag{7}$$

である．また，$\epsilon(f)$ を演算子 f のグラスマンパリティとして $\{f, g\}$ は対称化積 $(1/2)\{fg + (-1)^{\epsilon(f)\epsilon(g)} gf\}$ である．第 1 次拘束の時間発展に対するコンシステンシィ条件より，第 2 次拘束 (secondary constraints) が得られ，ラグランジュ未定常数が決定される．第 1 次・2 次を合わせた時間発展にコンシステントな拘束の組は，これを適当なサブセットに分類して以下のように得られる:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}(1): \quad P^F = 0, \qquad F^i + YG^i = 0 \\
&\mathrm{S}(2): \quad P^Y = 0, \qquad K = 0 \\
&\mathrm{S}(3): \quad P^X = 0, \qquad \{G^{ij}, p_i\}, p_j\} + i\tau^\alpha \psi^i_\alpha G_{ij} G^j + XG^i G_i + YG^i K_i = 0 \\
&\mathrm{S}(4): \quad \Lambda = 0, \qquad \{\psi^i_\alpha G_i{}^j, p_j\} + \{\mu^i_\alpha, G^i\} = 0 \\
&\mathrm{S}(5): \quad \chi^\alpha_i = 0 \\
&\mathrm{S}(6): \quad G(x) = 0, \qquad \{G^i, p_i\} = 0 \\
&\mathrm{S}(7): \quad \psi^i_\alpha G_i = 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

3. 演算子の射影

射影演算子法 [7] に従い, $C^{(0)}$ を拘束 [8] を満たすように変換する. 拘束 $S^{(n)}$ に対する射影演算子を $P^{(n)}$ $(n=1,\cdots,7)$ として, これを

$$C^{(0)} \xrightarrow{P^{(1)}} C^{(1)} \xrightarrow{P^{(2)}} C^{(2)} \xrightarrow{P^{(3)}} C^{(2)} \xrightarrow{P^{(4)}} C^{(4)} \xrightarrow{P^{(5)}} C^{(5)} \xrightarrow{P^{(6)}} C^{(6)} \xrightarrow{P^{(7)}} C^{(7)} = C^{(F)} \quad (9)$$

の順序で実行する. ここに

$$C^{(n)} = P^{(n)} C^{(n-1)}, \quad P^{(n)} = P^{(n)}(C^{(n-1)}) \qquad (n=1,\cdots,7) \qquad (10)$$

である.

一連の射影 (10) により正準共役の組 $C^{(F)}$ は

$$C^{(F)} = ((x^i, p_i), \psi^i_\alpha) \qquad (11)$$

となる. $C^{(F)}$ は拘束

$$G(x)=0, \qquad \{G^i, p_i\}=0, \qquad \psi^i_\alpha G_i = 0 \qquad (12)$$

を受け, 正準交換関係

$$\begin{aligned}
&[x^i, p_i] = i\hbar W^i{}_j, \\
&[p_i, p_j] = i\hbar\{n_j \partial^k n_i - n_i \partial^k n_j\} - \hbar W^k{}_i W^l{}_j G_{kl;mn}\{\psi^m_\alpha, \psi^n_\alpha\}, \\
&[\psi^i_\alpha, p_j] = -i\hbar n^i W_{kj} \partial^k n_l \psi^l_\alpha, \\
&[\psi^i_\alpha, \psi^j_\beta] = \hbar W^{ij} \delta_{\alpha\beta},
\end{aligned} \qquad (13)$$

に従う. ここに n_i は

$$n_i = G_i / \sqrt{G^j G_j} \qquad (14)$$

で与えられる, 曲面 $G(x)=0$ の単位法線ベクトルに対応する演算子であり, W_{ij} は

$$W_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j \qquad (15)$$

で定義される $G(x)=0$ のタンジェント方向への射影を与える演算子, $G_{ij;kl} = G_{ij} G_{kl} / G^m G_m$ である.

系のハミルトニアンは射影 (9) により

$$H_F = (1/2) p_i p_i + (1/8) G_{ij;kl} (\psi^i \cdot \psi^j)(\psi^k \cdot \psi^l) + H_Q \qquad (16)$$

となる. ここに付加項 H_Q は

$$H_Q = (3/8)\hbar^2 G_{ij;ij} + (5/8)\hbar G_{ij;ik} n^j n^k + (3/8)\hbar^2 G_{ij;kl} n^i n^j n^k n^l \qquad (17)$$

で与えられる量子補正項である.

4. まとめ

R^N 内で $G(x)=0$ で定義される曲面に拘束された超対称自由粒子の量子化を射影演算子法を用いて実行し次の結果を得た:

(1) 演算子の正準交換関係は対応するディラック括弧の演算子形と一致する.

(2) 射影されたハミルトニアンは第1の方法では得られない付加項 H_Q を含む. これは演算子の非可換性による量子効果と解釈できる.

また, 付加項 H_Q の存在により, 系の超対称性が演算子レベルで成り立たなくなることが示される (プレプリント準備中).

参考文献

[1] N. Ogawa, K. Fujii, and A. Kobushukin, Prog. Theor. Phys. **83** (1990), 894.
M. Ikegami, Y. Nagaoka, S. Takagi and T. Tanzawa, Prog. Theor. Phys. **88** (1992), 229.

[2] A. C. Davis, A. J. Macfarlane, P. C. Popat abd J. W. van Halten, J. Phys. A: Math., Nucl. Gen. **17** (1984), 2945.

[3] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, (Yeshva Univ. New York, 1964)

[4] P. Senjanovic, Ann. Phys. (N. Y.) **100** (1976), 227.

[5] G. V. Dunne, R. Jakiw and C. A. Trugenberger, Ann. Phys. (N. Y.) **194** (1989), 197.

[6] I. A. Batalin and E. S. Fradkin, Nucl. Phys. **B279** (1987), 514.

[7] M. Nakamura and N. Mishima, Prog. Theor. Phys. **81** (1989), 451.

[8] M. Nakamura and H. Minowa, J. Math. Phys. **34** (1993), 50.

[9] Y. Ohnuki and S. Kitakado, J. Math. Phys. **34** (1993), 2827.